LIMITI DI FUNZIONI

1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\boxed{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x+\sqrt{x})\right)'}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}}{2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}}{\dfrac{4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\,[x+\sqrt{x}]}}{\dfrac{4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}+1}{\cancel{2\sqrt{x}}[x+\sqrt{x}]} \cdot \frac{\cancel{2\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}+1}{4x^2\sqrt{x}+4x^2+x+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}} \cdot \underbrace{\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{\to 2}}{\cancel{\sqrt{x}} \cdot \left(4x^2+4x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1\right)} = 0.$$

LIMITE CON SERIE DI TAYLOR

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)-2x-2x^2}{x^3-3x^4} = \frac{0}{0} = \text{(SE USIAMO IL TEO. DE L'HOSPITAL)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+2x}-2-4x}{3x^2-12x^3} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\frac{-2}{(1+2x)^2}-4}{6x-36x^2} = \frac{-8}{\text{UN POLINOMIO CHE VA A } 0} = +\infty$$

VEDIAMO USANDO TAYLOR:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5).$$

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + O(x^5).$$

SOSTITUIAMO LO SVILUPPO DI TAYLOR NEL LIMITE:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x} - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + O(x^4) - \cancel{2x} - 2x^2}{x^3-3x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(-4 + \frac{8x}{3} + O(x^2)\right)}{\cancel{x^2}(x-3x^2)} = \frac{-4}{\text{QUALCOSA CHE VA A } 0} = +\infty.$$

REGOLA GENERALE:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty \text{ SE } gr(p) > gr(q); \quad \lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{q(x)} = 0 \text{ SE } gr(p) > gr(q)$$

E VICEVERSA.