STUDIO DI FUNZIONE (DATO PER CASA)

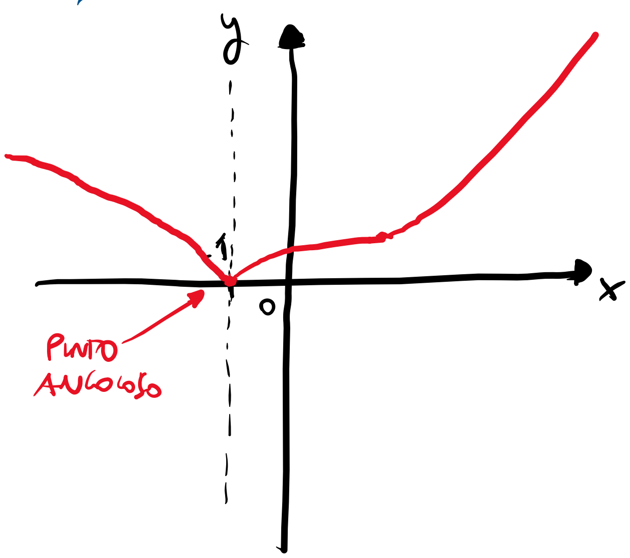
STUDIARE LA FUNZIONE $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\ln(x^2+4)}$.

NOTIAMO SUBITO CHE NELLA RADICE QUADRATA C'È IL QUADRATO DI UN BINOMIO. MA RICORDIAMO CHE, IN GENERALE:

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$

. QUI ACCADE LA STESSA COSA.

$$f(x)=\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\ln(x^2+4)}=\begin{cases} \dfrac{x+1}{\ln(x^2+4)} & \text{se } x\geq -1 \\ \dfrac{-x-1}{\ln(x^2+4)} & \text{se } x\leq -1 \end{cases}$$



$$D(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid \ln(x^2+4)\neq 0 \wedge x^2+4>0\}.$$

$x^2+4>0$ VALE SEMPRE $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\ln(x^2+4)=0 \Rightarrow \cancel{e}^{\cancel{\ln}(x^2+4)}=e^0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+4=1\Rightarrow \underline{x^2=-3}$$

O CI ACCORGIAMO CHE NON HA SOLUZIONI PERCHÉ x^2 NON PUÒ ESSERE NEGATIVO, OPPURE IMPOSTIAMO LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $\underline{x^2+3=0}$, DOVE, RICORDANDO CHE $\underline{Ax^2+Bx+C=0}$, $A=1$, $B=0$, $C=3$.

$$x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{B^2-4\cdot A\cdot C}}{2\cdot A}=\frac{-0\mp\sqrt{0^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{\mp\sqrt{-12}}{2}\notin\mathbb{R}$$

QUINDI $\ln(x^2+4)=0$? NO! QUINDI $D(f)=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

LIMITI: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\ln(x^2+4)} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{H}{=}$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)'}{(\ln(x^2+4))'} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{2x}{x^2+4}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+4}{2x} = +\infty.$

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x-1}{\ln(x^2+4)} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{\frac{2x}{x^2+4}} =$

$= (-1)\cdot \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4}{2x} = +\infty.$

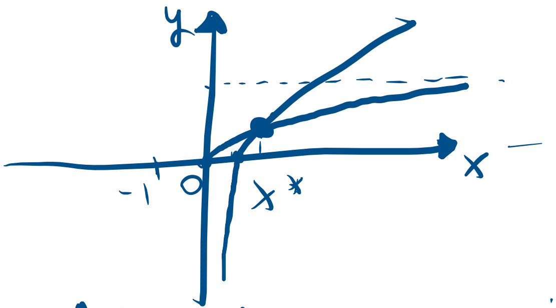
DERIVATA: $f'(x) = \left(\dfrac{x+1}{\ln(x^2+4)}\right)' =$ (RAMO $x \geq -1$)

$= \dfrac{1\cdot\ln(x^2+4) - (x+1)\cdot\frac{2x}{x^2+4}}{\ln^2(x^2+4)} = \dfrac{\frac{(x^2+4)\ln(x^2+4) - 2x(x+1)}{x^2+4}}{\ln^2(x^2+4)} > 0$

$x^2+4>0$

$\ln^2(x^2+4)>0$

DOVE $(x^2+4)\cdot\ln(x^2+4) - 2x(x+1) > 0$??? $\ln(x^2+4) > \dfrac{2x(x+1)}{x^2+4}$?



$\dfrac{2x^2+2x}{x^2+4}$

ANCHE L'ALTRO RAMO DI DERIVATA f' E' COME IL PRECEDENTE, MA MOLTIPLICATO PER (-1), QUINDI DOVE I 2 RAMI SI SEPARANO AVREMO UN "PUNTO ANGOLOSO", IN CUI $f(x)$ NON E' DERIVABILE.

Siccome $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+4)\ln(x^2+4) - 2x^2 - 2x}{(x^2+4)\ln(x^2+4)} & \text{se } x \geq -1 \\[2ex] -\dfrac{(x^2+4)\ln(x^2+4) - 2x^2 - 2x}{(x^2+4)\ln(x^2+4)} & \end{cases}$

$$f'(-1) = \begin{cases} \dfrac{5\cancel{\ln 5}}{5\cancel{\ln 5}} = 1 \\[2ex] -\dfrac{5\cancel{\ln 5}}{5\cancel{\ln 5}} = -1 \end{cases} \neq \Rightarrow \text{in } x^* = -1 \text{ la } f(x) \text{ non è derivabile}$$