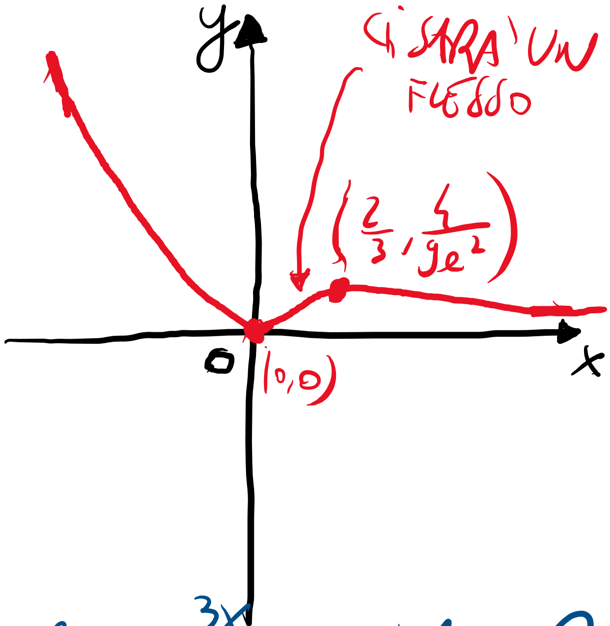
# ESERCIZIO (STUDIO DI FUNZIONE)

$$f(x) = x^2 e^{-3x}.$$




$f(x)$ SI PUÒ ANCHE SCRIVERE $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{3x}}$.

IL DOMINIO NON PRESENTA PROBLEMI PERCHÉ IL DENOMINATORE $e^{3x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$ (DALLA PARTE POSITIVA) $\Rightarrow y = 0$ È UN ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-3x} = \infty \cdot \infty = +\infty.$$

INTERSEZIONE CON L'ASSE $y$ (CIOÈ $x=0$):

$$\begin{cases} f(x) = x^2 e^{-3x} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ IL GRAFICO PASSA PER L'ORIGINE $(0,0)$.

CALCOLIAMO LA DERIVATA DI $f(x)$:

COME PRODOTTO: $f'(x) = 2x\,e^{-3x} + x^2 \cdot (-3)\,e^{-3x} =$

$= e^{-3x} \cdot (2x - 3x^2)$;

COME RAPPORTO:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^{3x} - x^2 \cdot 3 \cdot e^{3x}}{(e^{3x})^2} = \frac{\cancel{e^{3x}}(2x-3x^2)}{(e^{3x})^{\cancel{2}}} =$$

$= (2x - 3x^2) \cdot e^{-3x}$.

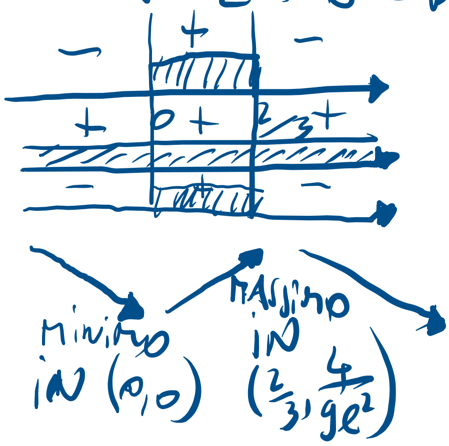
$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3x^2 \geq 0 \\ e^{-3x} \geq 0 \end{cases}$$

È SEMPRE VERIFICATA, $\forall x \in D(f)$

$2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x-2) = 0 \;\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

$3x^2 - 2x \leq 0$

$$\begin{cases} 2x - 3x^2 \geq 0 \\ e^{-3x} \geq 0 \end{cases}$$




$x = \frac{2}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot e^{-\cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}}} =$

$= \frac{4}{9} \cdot e^{-2} = \frac{4}{9e^2}$

PUNTI STAZIONARI: $(0,0) \Rightarrow$ MINIMO

$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9e^2}\right) \Rightarrow$ MASSIMO

$f''(x) = (2-6x)e^{-3x} + (2x-3x^2) \cdot (-3) \cdot e^{-3x} =$

$= e^{-3x}(2 - 6x - 6x + 9x^2) = e^{-3x} \cdot (9x^2 - 12x + 2) = 0$

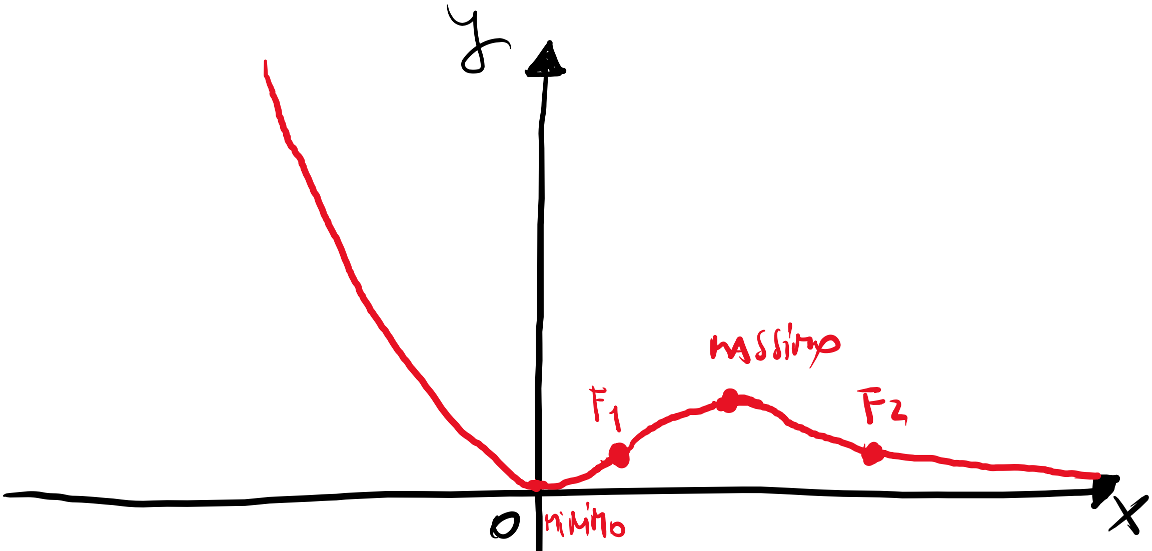
$$x_{1,2} = \frac{12 \mp \sqrt{144 - 72}}{18} = \frac{12 \mp 6\sqrt{2}}{18} = \cancel{6}\left(\frac{2 \mp \sqrt{2}}{\cancel{18}_3}\right) = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{3}$$

Ci sono 2 flessi: $F_1 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}, f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)\right)$

$F_2 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}, f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)\right)$

$$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right) = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot e^{-\cancel{3}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{3}}\right)} = \frac{6-4\sqrt{2}}{9} e^{2-\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right) = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot e^{-\cancel{3}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\cancel{3}}\right)} = \frac{6+4\sqrt{2}}{9} \cdot e^{2+\sqrt{2}}$$




$f(x)$ convessa $\forall x \in \left(-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)$;

$f(x)$ concava $\forall x \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}, \frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)$;

$f(x)$ convessa $\forall x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}, +\infty\right)$.