Esercizio Studiare completamente la funzione

$f(x) = x^3 + \ln x^3$.

Attenzione! L'espressione $\ln x^3 = \ln(x^3) =$

$= \ln x^3 = 3 \cdot \ln x$.

Invece, se avessimo scritto $\ln^3 x = (\ln x)^3 =$

$= \ln x \cdot \ln x \cdot \ln x$. Invece, $\ln(x^3) = \ln x + \ln x +$

$+ \ln x$.

Quindi, la nostra funzione è $f(x) = x^3 + 3 \ln x$.

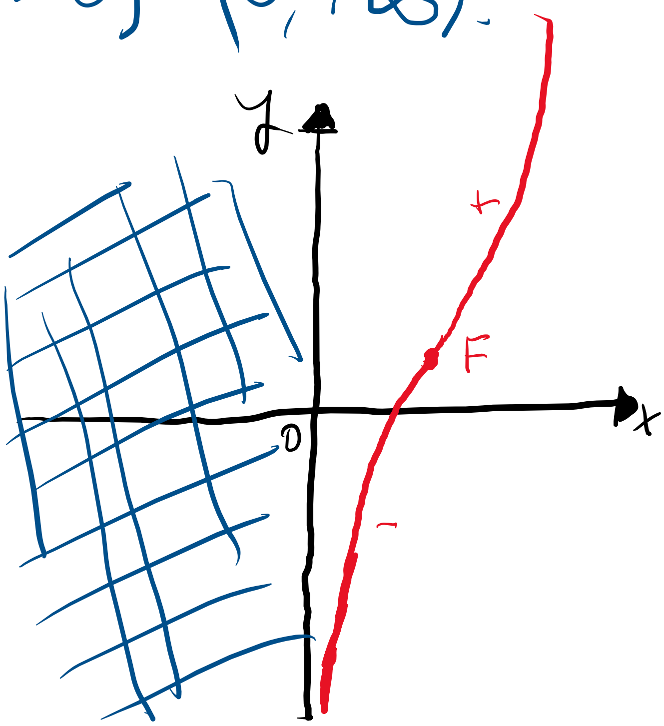
Dominio: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, +\infty)$.

Limiti: $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

$= 0 + 3 \cdot (-\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 3 \cdot \infty =$

$= +\infty$.



Derivata: $f'(x) = 3x^2 + \dfrac{3}{x}$;

oppure, se avessimo scritto: $f(x) = x^3 + \ln x^3$,

$f'(x) = 3x^2 + \dfrac{3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}} = 3x^2 + \dfrac{3}{x}$.

È FACILE NOTARE CHE $f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{x} > 0$

E NON SI ANNULLA MAI! $f'(x) = \frac{3x^3+3}{x} = 0$

$3x^3+3=0 \Rightarrow \cancel{3}x^3 = -\cancel{3} \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1.$

$f'(-1)=0$, LA DERIVATA SI ANNULLA IN -1, MA

$-1 \notin D(f) \Rightarrow$ NON ABBIAMO NÉ MASSIMI NÉ MINIMI.

<u>DERIVATA SECONDA</u>: $f''(x) = \left(3x^2 + \frac{3}{x}\right)' = 6x + 3 \cdot \frac{0 - 1 \cdot 1}{x^2} =$

$= 6x - \frac{3}{x^2} = \frac{6x^3 - 3}{x^2} \geq 0 \Rightarrow {}^{2}\cancel{6}x^3 \geq \cancel{3}^{1} \Rightarrow$

$x^3 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x_F = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \in D(f)$. $F = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\right) =$

$= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3 + \ln\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2}\right)$