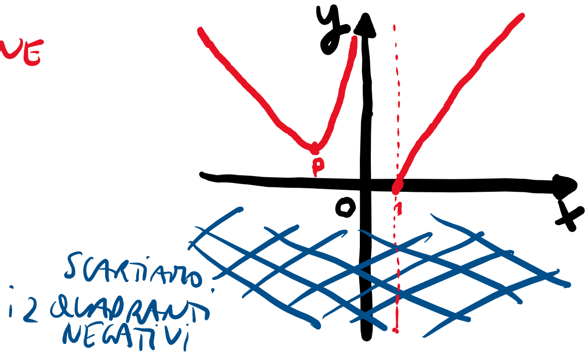
STUDIO DI FUNZIONE COMPLETO

STUDIARE LA FUNZIONE $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$ E DISEGNARNE IL GRAFICO DEL PIANO CARTESIANO.



SI COMINCIA CON LA DETERMINAZIONE DEL DOMINIO DELLA FUNZIONE.
NOTIAMO CHE LA FUNZIONE È UNA RADICE QUADRATA, QUINDI È SEMPRE POSITIVA, O NON NEGATIVA!

$$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x^3-1}{x}\geq 0\right\}$$

$x^3-1\geq 0$ — — + → $\mathbb{R}$

$x>0$ — + + → $\mathbb{R}$

DOMINIO + — + → $\mathbb{R}$ (0, 1)

$$D(f)=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$$

$$x^3-1\geq 0 \Rightarrow x^3-1=\underbrace{(x-1)}_{\geq 0}\cdot\underbrace{(x^2+x+1)}_{\text{SEMPRE POSITIVO}}\geq 0$$

PERCHÉ $x^2+x+1>0$?

$$x_{1,2}=\frac{-1\mp\sqrt{1-4}}{2}\notin\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x}}=\sqrt{+\infty}=+\infty. \qquad \lim_{x\to1}\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}=\sqrt{\frac{0}{1}}=0.$$

(IL GRAFICO PASSA PER IL PUNTO (1,0)).

$$\lim_{x\to0^-}\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}=+\infty. \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x}}=+\infty.$$

<u>DERIVATA</u>: $$\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}\right)'=\left(\left(\frac{x^3-1}{x}\right)^{\frac12}\right)'=\frac12\cdot\left(\frac{x^3-1}{x}\right)^{\frac12-1}\cdot\left(\frac{x^3-1}{x}\right)'=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}\cdot\frac{3x^2\cdot x-(x^3-1)\cdot 1}{x^2}=\frac12\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}\cdot\frac{3x^3-x^3+1}{x^2}=$$

$$=\frac{2x^3+1}{2x^2\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}\geq 0\ ?$$

AL DENOMINATORE, È TUTTO POSITIVO.
AL NUMERATORE, $2x^3+1\geq 0$.

$$2x^3+1=0\Rightarrow x^3=-\frac12\Rightarrow x^*=\sqrt[3]{-\frac12}=\sqrt[3]{-1}\cdot\sqrt[3]{\frac12}=-\sqrt[3]{\frac12}=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

ESSENDO L'UNICA SOLUZIONE, POSSIAMO DIRE CHE $f'(x)\geq 0$ SE $x\geq-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

— + + → $\mathbb{R}$ ($-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, 0, 1) MINIMO

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\sqrt{\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3-1}{\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{-\frac12-1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}}=\sqrt{\frac{\frac32}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}}=\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}}=\sqrt{3}\cdot 2^{\frac16-\frac12}=$$

$$=\sqrt{3}\cdot 2^{-\frac13}.$$