CALCOLO DEI LIMITI CON LO SVILUPPO DI TAYLOR

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{4x^2} = \frac{0}{0} =$ TAYLOR / DE L'HOSPITAL

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1+x}}{8x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \frac{1}{8}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{-1}{(1+x)^2}}{1} =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot \frac{1+1}{1} = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \end{array}}$$

CON TAYLOR:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(1 + o(x))}{4\cancel{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{4}.$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+x)} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+x}} = 2.$

OPPURE CI ACCORGIAMO CHE $e^{2x} - 1 = (e^x + 1)\cdot(e^x - 1)$,

QUINDI $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x+1)\cdot(e^x-1)}{\ln(1+x)} =$

$$= 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \overset{T}{=} 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + x + o(x^2) - \cancel{1}}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} =$$

$$= 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\cdot(1 + o(x))}{\cancel{x}\cdot(1 + o(x))} = 2\cdot 1 = 2.$$